1 Intervalles

1.1 Intervalles fermés

Définition

Soient a et b deux réels.
L'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$ est un intervalle, noté $[a\ ;\ b]$. a et b sont les bornes.

On le représente sur la droite réelle de la façon suivante :

Cet ensemble est un intervalle de $\mathbb{R}$. a et b sont ses bornes. Cet intervalle contient ses bornes. On dit qu'il est **fermé**.

1.2 Intervalles semi-ouverts

Définition

Soient a et b deux réels.
L'ensemble des réels x tels que $a < x \leq b$ est un intervalle, noté $]a\ ;\ b]$. a et b sont les bornes.

L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x < b$ est un intervalle, noté $[a\ ;\ b[$. a et b sont les bornes.

1.3 Intervalles ouverts

Définition

Soient a et b deux réels.
L'ensemble des réels x tels que $a < x < b$ est un intervalle, noté $]a\ ;\ b[$. a et b sont les bornes.

2 Intervalles infinis

2.1 Intervalle illimité à droite

Définition

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est un intervalle, noté $]a\ ;\ +\infty[$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est un intervalle, noté $[a\ ;\ +\infty[$.

Remarque : Le symbole ∞ , qui se lit « infini » a été inventé par le mathématicien John Wallis (1616-1703). **Ce n'est pas un nombre réel**.

2.2 Intervalles illimités à droite

Définition

L'ensemble des réels x tels que $a < x$ est un intervalle, noté $]a\ ;\ +\infty[$.
L'ensemble des réels x tels que $a \leqslant x$ est un intervalle, noté $[a\ ;\ +\infty[$.

Définition

L'ensemble des réels x tels que $x < a$ est un intervalle, noté $]-\infty\ ;\ a[$.
L'ensemble des réels x tels que $x \leqslant a$ est un intervalle, noté $[-\infty\ ;\ +a]$.

Remarques :

1. Le crochet est fermé, tourné vers l'intérieur si l'on garde le nombre. Il est ouvert, vers l'extérieur, si l'on rejette le nombre.
2. ∞ n'est pas un nombre, donc le crocher du côté de l'infini est toujours tourné vers l'extérieur.

3 Réunion et intersection de deux intervalles

Définition

Soient Iet J deux intervalles.

1. L'ensemble des réels qui appartiennent à la fois à I et à J est appelé l'intersection de I et J. Cet ensemble est noté $I \cap J$.
2. L'ensemble des réels qui appartiennent à I ou à J est appelé la réunion de I et J. Cet ensemble est noté $I \cup J$.

Exemples :

$[4\ ;\ 5] \cap [2\ ;\ 3] = \emptyset$

$[2\ ;\ 5] \cap [2\ ;\ 3] = [2\ ;\ 3]$

$[4\ ;\ 7] \cap [6\ ;\ 8] = [6\ ;\ 7]$

$[4\ ;\ 7] \cup [6\ ;\ 8] = [4\ ;\ 8]$

4 Exercices sur Internet

1. Indiquer si la réunion de deux intervalles est un intervalle ou non et le préciser le cas échéant
2. Caractériser un intervalle par des inégalités
3. Écrire l'intervalle ensemble des solutions d'une inéquation ou d'un système d'inéquations du premier degré à une
4. Détermination de la réunion et de l'intersection de deux intervalles
5. Caractérisation d'un intervalle par des inégalités
6. Écriture de l'intervalle ensemble des solutions d'une inéquation ou d'un système d'inéquations du premier degré à
7. Représentation graphique de la réunion et de l'intersection de deux intervalles
8. Caractériser des inégalités par un intervalle ou une réunion d'intervalles
9. Rechercher les intervalles dont l'intersection est un intervalle non vide
10. Rechercher les intervalles dont la réunion est un intervalle
11. Indiquer si un intervalle est inclus ou non dans un autre

5 Notion de fonction

Définition

Soit $\mathscr{D}$ un intervalle de $\mathbb{R}$ ou une réunion d'intervalles.
Une fonction numérique f, définie sur $\mathscr{D}$, est un procédé qui, à chaque nombre de x de $\mathscr{D}$ associe un **unique** nombre, noté $f(x)$.
Le réel x est appelé la **variable**.
$f(x)$ est **l'image** de x par f.
x est un antécédent de $f(x)$.
On écrit : $f : \begin{array}{l} \mathscr{D} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \end{array}$

Exemples :

1. On enregistre la température en un endroit précis sur une période de 24 heures. $T : x \mapsto y = T(x)$ où $T(x)$ est la pression à l'instant x.
2. On enregistre la hauteur d'eau dans un port en fonction de l'heure (elle varie en fonction de la marée).
3. $v(x)$ est la vitesse d'une voiture à x km de son point de départ sur un circuit automobile .
4. $f(x)$ est la carré du nombre x : Sur $\mathbb{R}$: $f : x \mapsto x^2$.
5. $\mathscr{D} =]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ =\infty[$: $f : x \mapsto \frac{1}{x}$

   Remarque : $]-\infty\ ;\ 0[\cup]0\ ;\ =\infty[$ se note aussi $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ou $\mathbb{R}^*$
6. $\mathscr{D} = [0\ ;\ +\infty[$: $f : x \mapsto \sqrt{x}$
7. $\mathscr{D} =]0, 1[$. $p\ :\ x \mapsto y = p(x)$ où y est la première décimale de x.
   On a alors $p\left(\dfrac{1}{3}\right) = 3$, $p(0,123) = 1$

Remarques

- Un nombre ne peut avoir qu'une seule image par une fonction f.
- Un nombre peut avoir plusieurs antécédents par f ; exemple : pour $f(x) = x^2$, on a $f(-2) = f(2) = 4$ donc 4 a deux antécédents par f

Exemples :

1. Sur $\mathbb{R}$, on considère la fonction $f : x \mapsto 3x^2 + 5x - 4$.
   Calculer les images de 0, 3, 5 et -1.
   - $f(0) = 3 \times 0^2 + 5 \times 0 - 4 = -4$
   - $f(3) = 38$
   - $f(5) = 3 \times 5^2 + 5 \times 5 - 4 = 96$
   - $f(-1) = 3 \times (-1)^2 + 5 \times (-1) - 4 = -5$
2. $\mathscr{D} = \mathbb{R}$. $g(x) = x^2$.
   Quels sont les antécédents de -4 ? de 2 ?
   -1 a-t-il des antécédents ?

   Réponses :
   x est un antécédent de -4 si $g(x) = -4$, donc $x^2 = -4$.
   Or, $x^2 \geqslant 0$ donc x^2 ne peut pas être égal à -4 qui est négatif.
   -4 n'a pas d'antécédent.

   Les antécédents de 2 sont les nombres x tels que $x^2 = 2$, donc $x^2 = 2$.
   2 a donc pour antécédents $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$.

(**rappel** : pour $a \geqslant 0$, l'équation $x^2 = a$ possède deux solutions, $-\sqrt{a}$ et $\sqrt{a}$; en effet, $x^2 = a$ s'écrit $x^2 - a = 0$, d'où $x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$ soit $(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a}) = 0$ après factorisation ; on a bien les deux solutions proposées, en utilisant le fait qu'une produit de facteurs est nul si, et seulement si, l'un des facteurs est nul.)

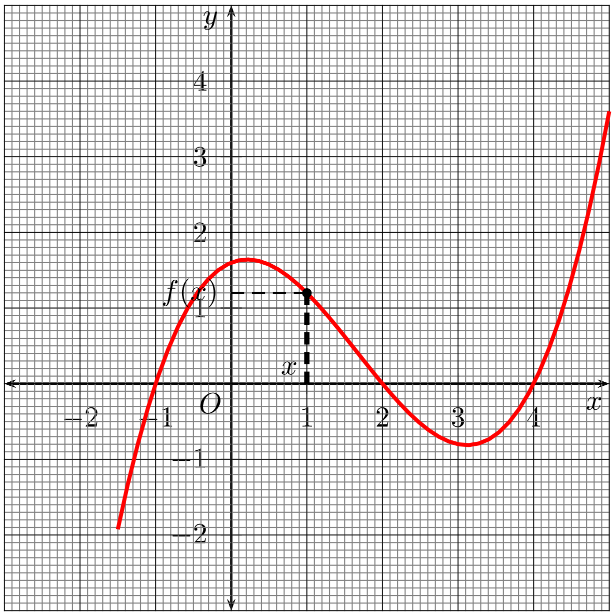
x est un antécédent de -1 si et seulement si $g(x) = -1$, donc si et seulement si $x^2 = -1$, ce qui est impossible car $x^2 \geqslant 0$.
-1 n'a pas d'antécédent par g.

6 Courbe représentative

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
La courbe $\mathscr{C}_f$, représentative de f, est l'ensemble des points $M(x\ ;\ f(x))$ où $x \in \mathscr{D}$.

Exemple :
Voici la courbe représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-1,5\ ;\ 5]$



Lecture d'une image : Quelles sont les images de -1.5 ? de -1 ? de 0 ? de 1 ? de 2 ?
L'image de $-1,5$ est environ égale à -1,9 ; $\boxed{f(-1,5) \approx -1,9}$

L'image de -1 est 0 : $\boxed{f(-1) = 0}$

L'image de 0 est 1,6 : $\boxed{f(0) = 1,6}$

De même : $f(1) = 1,2$; $\boxed{f(2) = 0}$

Lecture d'un antécédent : Quelles sont les antécédents de 0 ? de 1 ? de 2 ? de 4 ?
Pour lire les antécédents de 0, on regarde les abscisses des points de la courbe qui ont 0 pour ordonnée :
Les antécédents de 0 sont -1, 2 et 4.

Antécédents de 1 : approximativement -0,5 ; 1,2 et 4,4.

Antécédents de 4 : il n'y en a pas sur l'intervalle considéré.

Résumé

- Définir une fonction f sur un ensemble $\mathscr{D}$, c'est associer à chaque nombre $x \in \mathscr{D}$ un nouveau nombre noté $f(x) \in \mathbb{R}$.
- x est donc l'abscisse et $f(x)$ l'ordonnée d'un point M de la courbe $\mathscr{C}_f$.
- L'ensemble $\mathscr{D}$ est l'ensemble de définition de la fonction f.
- Le nombre $f(x)$ est l'image du nombre réel x par la fonction f.
- La courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère $(O; I; J)$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $x \in \mathcal{D}$ et $y = f(x)$.
- Ne pas confondre les notations f (une fonction), $f(x)$ (un nombre) et $\mathcal{C}_f$ (une courbe).
- L'image d'un nombre x est donc $y = f(x)$ et se lit graphiquement sur l'axe des ordonnées (« axe des y »).

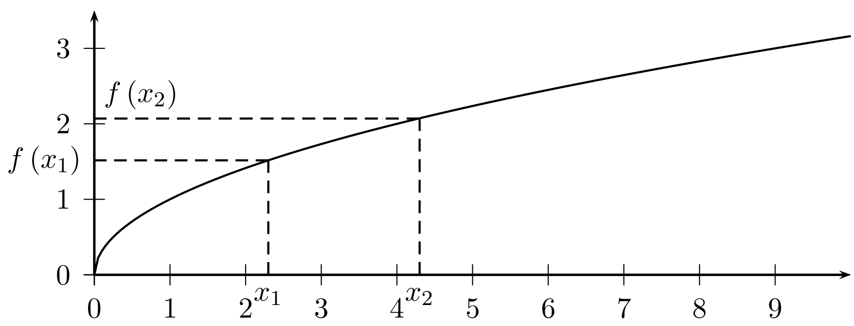
7 Variations d'une fonction

7.1 Sens de variation

Définition

Une fonction f est croissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ augmentent aussi.
Traduction mathématique : Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1 \leqslant f(x_2$.
(une fonction croissante conserve l'ordre.)

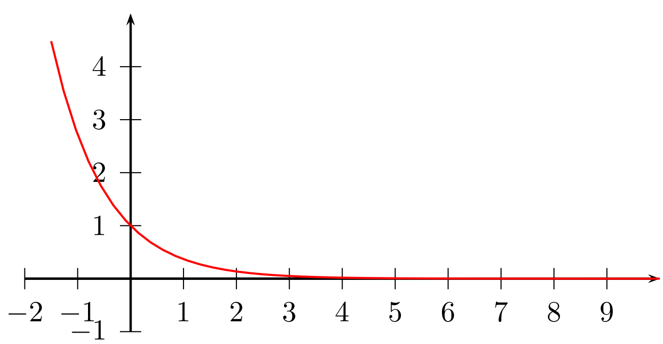
Illustration graphique :



Définition

Une fonction f est décroissante sur un intervalle I signifie que sur l'intervalle I, si les valeurs de la variable x augmentent, alors les images $f(x)$ diminuent.
Traduction mathématique : Pour tous x_1 et x_2 de I tels que $x_1 \leqslant x_2$, alors $f(x_1 \geqslant f(x_2$.
(une fonction croissante renverse l'ordre.)

Illustration graphique :

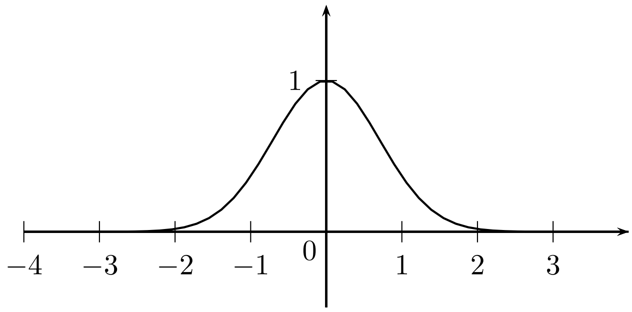


7.2 Extremum :

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathscr{D}$.
f admet un maximum en $a \in \mathscr{D}$ si, pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(x) \leqslant f(a)$. f admet un minimum en $a \in \mathscr{D}$ si, pour tout x de $\mathscr{D}$, $f(x) \geqslant f(a)$. f admet un extremum en a si f admet un maximum ou un minimum.

Exemples :



Le maximum est 1, atteint en 0, mais f n'a pas de minimum.

7.3 Tableau de variation d'une fonction

Un tableau de variation sert à rassembler visuellement toutes les informations sur les variations d'une fonction.

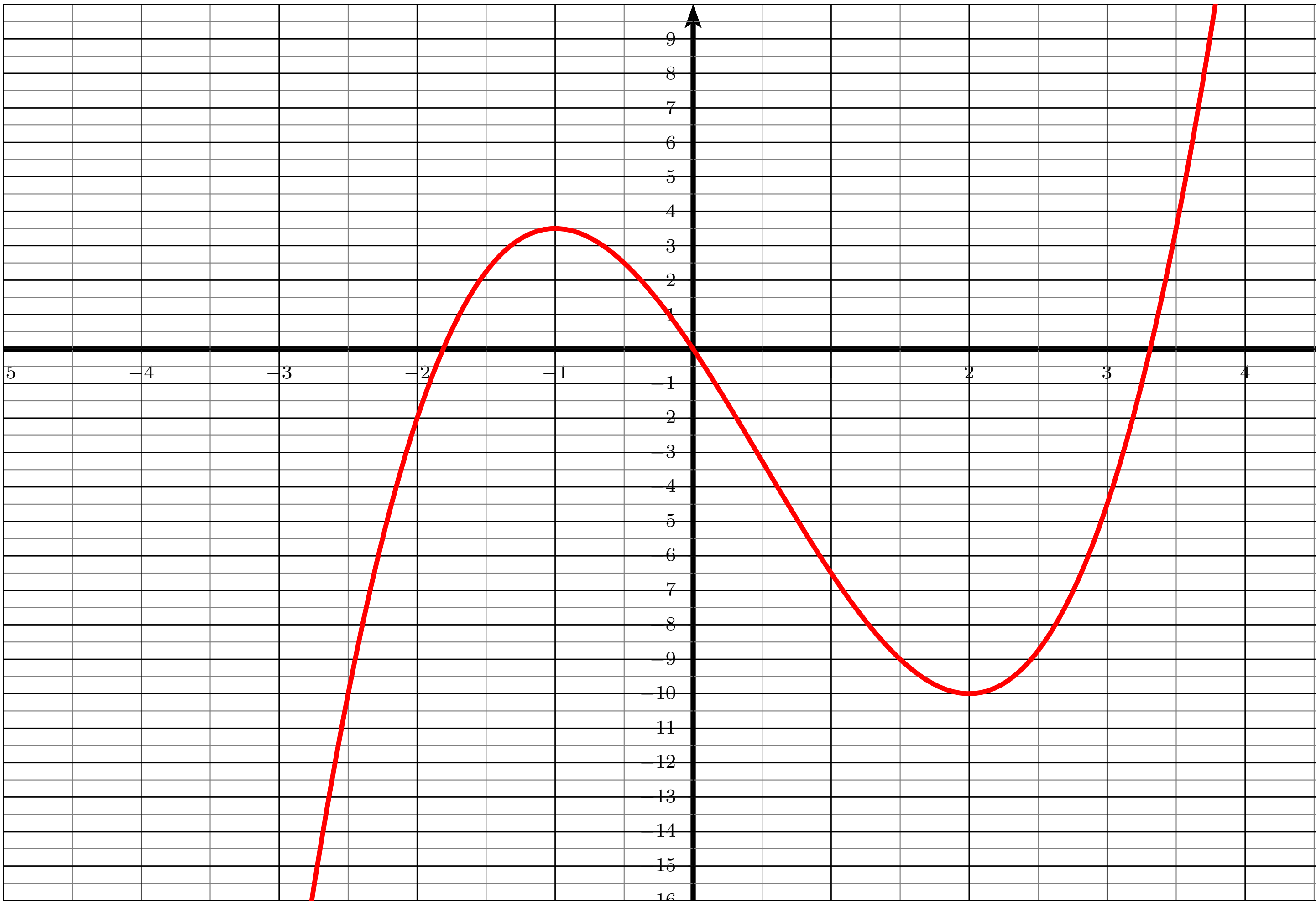
Exemples :

1. Soit la courbe ci-dessous, représentative de la fonction définie par :$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x$

La fonction f est définie sur $[-6;3]$, croissante sur $[-6;-4]$, décroissante sur $[-4;1]$ et croissante sur $[-1;3]$.
On a : $f(-6) = 6$; $f(-4) = \frac{56}{3}$; $f(1) = -\frac{13}{6}$; $f(3) = \frac{21}{2}$.
Le tableau de variation est alors :

x	-6		-4		1		3
$f(x)$	6	$\nearrow$	$\frac{56}{3}$	$\searrow$	$-\frac{13}{6}$	$\nearrow$	$\frac{21}{2}$

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 12x}{2}$.
La courbe représentative est

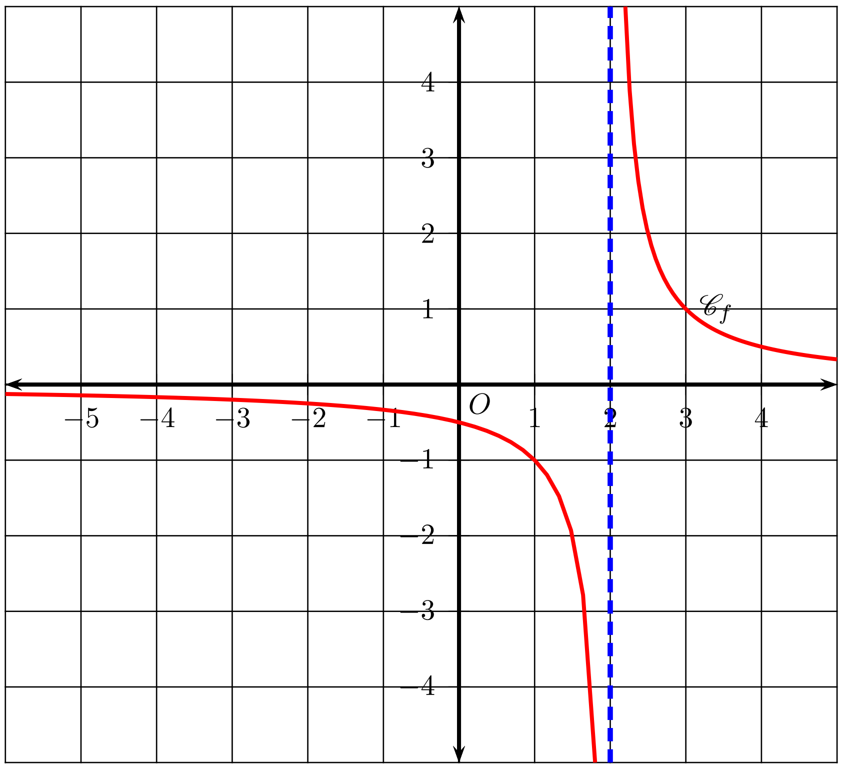


Le tableau de variation de f est :

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$3,5$	$\searrow$	-10	$\nearrow$	$+\infty$

 page 8 page 8

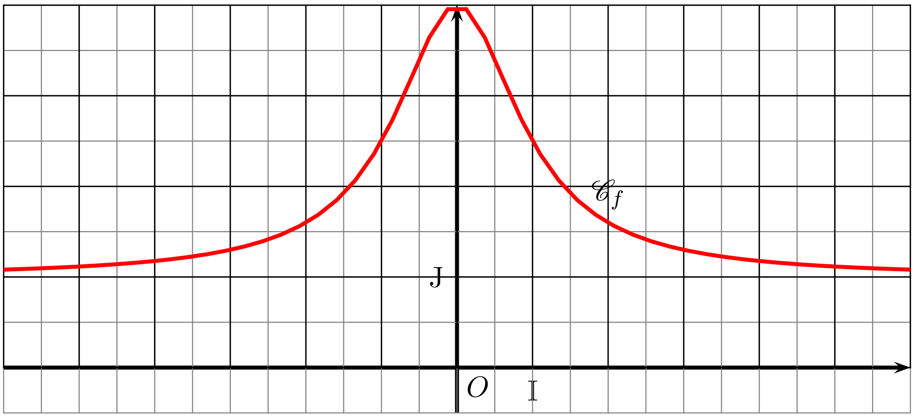
2. Soit $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{x-2}$



La fonction f n'est **pas définie** en $x = 2$. 2 est une valeur **interdite**.
On traduit cette situation par une double barre verticale dans le tableau de variation.
La fonction est décroissante sur $]\infty; 2[$ et sur $]2; +\infty[$. Quand x tend vers $-\infty$, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de 0, de même que quand x tend vers $+\infty$. Le tableau de variation est :

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

3. Soit la fonction f définie sur $[-6\ ;\ 6]$ par $f(x) = 1 + \frac{3}{x^2+1}$ dont voici la courbe représentative :



Cette fonction est croissante sur $]-6\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ 6[$.

Le maximum de $f(x)$ est 4 ($f(0) = 4$). $f(-6) = f(6) = \dfrac{40}{37}$.

Le tableau de variation est :

x	-6		0		6
$f(x)$			4		
		$\nearrow$		$\searrow$	
	$\frac{40}{37}$				$\frac{40}{37}$